

## Exemples d'application (variable aléatoire)

Considérons les deux distributions suivantes :

X	2	4	6
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Y	-4	3	33
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Elles ont comme valeurs moyennes :(espérance mathématique)

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{2} = 4,5$$

$$E(Y) = -4 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{3} + 33 \times \frac{1}{6} = 4,5$$

Donc même centre de distributions par contre

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} + 6^2 \times \frac{1}{2} = 23 \quad \text{et} \quad E(Y^2) = (-4)^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 33^2 \times \frac{1}{6} = \frac{385}{2}$$

$$D' \text{ ou } V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 23 - (4,5)^2 = \frac{11}{4}$$

$$\text{Et } V(Y) = \frac{689}{4}$$

Valeur très supérieure qui indique une dispersion de Y autour de sa moyenne beaucoup plus grande que celle de X



**Exercice :**

Une urne contient une boule qui porte le numéro 0 deux qui porte le numéro 1 et quatre qui portent le numéro 3 ,on extrait simultanément deux boules dans cette urne.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire  $X$  qui représente la somme des numéros obtenus puis calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Solution :**

Parmi les chiffres suivants 0 ;1 ;1 ;3 ;3 ; 3 ;3

si on fait l'addition de deux chiffres.

on a les différentes cas suivantes.

$$0+1=1 ;$$

$$2=1+1;$$

$$3=0+3;$$

$$4=3+1;$$

$$6=3+3;$$

$1=0+1 \Leftrightarrow$  tirer une boule de numéro 0 et une boule porte le numéro 1 c à d  
 $C_1^1 C_2^1 = 1 \times 2 = 2$

$$\text{Or card } (\Omega) = C_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!2!} = 21$$

$$\text{Donc } P(X=1) = \frac{2}{21}$$

De même pour  $P(X=2) : 2=1+1$  (on a deux boules portent le numéro 1)

$$\text{Donc } P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_7^2} = \frac{1}{21}$$

$P(X=3) : 3=3+0$  une boule porte le numéro 0 (on a une boule )et une boule porte le numéro 3 (on a 4 boules portent le numéro 3)

$$\text{Donc } P(X=3) = \frac{C_1^1 C_4^1}{C_7^2} = \frac{1 \times 4}{21} = \frac{4}{21}$$

$P(X=4) : (4=3+1)$

$$P(X=4) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_7^2} = \frac{4 \times 2}{21} = \frac{8}{21}$$

$P(X=6) : (6=3+3)$  deux boules portent le numéro 3 parmi 4

$$\text{Donc } P(X=6) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21}$$

Finalement la loi de probabilité se représente dans le tableau suivant

X	1	2	3	4	6
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{6}{21}$

Remarque que  $\sum P(X=x_i) = 1$

Espérance mathématique  $E(X) = \sum x_i P(X=x_i)$

$$=1 \times \frac{2}{21} + 2 \times \frac{1}{21} + 3 \times \frac{4}{21} + 4 \times \frac{8}{21} + 6 \times \frac{6}{21}$$

$$= \frac{2+2+12+32+36}{21} = \frac{84}{21} = 4$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{2}{21} + 2^2 \times \frac{1}{21} + 3^2 \times \frac{4}{21} + 4^2 \times \frac{8}{21} + 6^2 \times \frac{6}{21}$$

$$= \frac{2+4+36+128+216}{21} = \frac{366}{21} = \frac{122}{7}$$

$$\text{La variance } V(X) = \frac{122}{7} - 4^2 = \frac{122-16 \times 7}{7} = \frac{122-112}{7} = \frac{10}{7}$$